# A $3 \times n$-es mérgezett csokoládé titkai

Matematika BSc szakdolgozat

*Szerző:*
Kiskároly Tímea

*Témavezető:*
Dr. Waldhauser Tamás

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2016

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezető

A mérgezett csokoládé játék egy kétszemélyes kombinatorikai játék. A matematikusokat régóta foglalkoztatják az ezzel kapcsolatban felmerülő kérdések: melyik játékosnak van nyerő stratégiája, milyen szabályszerűségek állapíthatók meg és így tovább.

A játék, melyet David Gale talált ki 1982-ben, egy speciális esete a Fred Schuh által 1952-ben feltalált ún. osztójátéknak. A játék neve angolul chomp, aminek a magyar megfelelője ropogtat, rágcsál. Szokták még harapásnak is nevezni, helyenként pedig Gale-féle lefedős játékként hivatkoznak rá.

## 1.1. Alapfogalmak

Olyan egyszerű fogalmakat, mint például *játék*, *állás*, *kezdőállás*, *végállás*, *nyerő stratégia* nem definiálok külön – ezek megtalálhatók Csákány Béla könyvében [3] –, inkább azokra térek ki részletesebben, melyek szükségesek a harapás játék megértéséhez, vizsgálatához.

**1.1. Definíció.** Legyen $P$ a játék állásainak halmaza. Az $M \subseteq P$ halmazt a játék *magjának* nevezzük, ha

- a nyerő végállások elemei az $M$ halmaznak;
- tetszőleges $M$-beli állásból csak olyan állásba tudunk lépni, ami nem $M$-beli;
- tetszőleges nem $M$-beli álláshoz létezik legalább egy olyan állás, ami $M$-beli és egy lépéssel el tudjuk érni.

**1.2. Definíció.** Nyerő lépésnek nevezzük azt, ha egy játékos magbeli állásba lép.

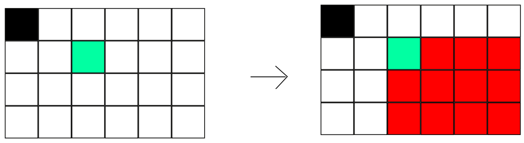
**1.3. Megjegyzés.** Ha egy játékosnak van nyerő lépése, akkor van nyerő stratégiája is. A nyerő stratégia az, hogy lépjünk mindig magbeli állásba. Ha az egyik játékos magbeli állásba lép, akkor a másik játékos a mag definíciója miatt csak magon kívüli állásba tud lépni. Az első játékos pedig magon kívüli állásból ismét magbelibe léphet, ezt a mag definíciója biztosítja. Ha a játék véges sok lépésben befejeződik, akkor az első játékos tud majd a nyerő végállásba lépni, ami azt jelenti, hogy ő nyer.

**1.4. Megjegyzés.** A továbbiakban a magbeli állásokat *jó állásoknak*, míg a magon kívüli állásokat *rossz állásoknak* is fogjuk nevezni.

**1.5. Tétel.** *A mag egyértelműen meghatározott.*

## 1.2. Az $m \times n$-es játék

Vegyünk egy $m \times n$-es tábla csokoládét. A bal felső kockáról tudjuk, hogy mérgezett, tehát aki azt megeszi, elveszti a játékot. A játék során a soron következő játékos választ a táblából egy tetszőleges kockát (az ábrán ezt zöld színnel jelöltem), ezután az összes olyan kockát, mely a kiválasztott alatt, illetve attól jobbra helyezkedik el, megeszi (a zöld kockával együtt tehát a pirosakat is).



A csoki egyszer el fog fogyni, tehát ez egy véges játék. Az a cél, hogy úgy játsszuk a játékot, hogy ne nekünk kelljen megenni a mérgezett csokoládékockát. Sokan foglalkoztak azzal, hogy megkeressék a játék nyerő stratégiáját, de az $m \times n$-es játék esetében még nem jártak sikerrel. Viszont a $2 \times n$-es játék nyerő stratégiája ismert (lásd az 1.3. alfejezetet). Ám annak ellenére, hogy az $m \times n$-es játék nyerő lépései nem ismertek, egy fontos dolgot tudunk a téglalap alakú kezdőállásokról, amit a következő állításban fogalmazunk meg.

**1.6. Állítás.** *Tetszőleges $m, n > 1$ természetes számok esetén, ha a kezőállás $m \times n$-es téglalap alakú állás, akkor a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy a játék $m \times n$-es táblával indul. Ha az első játékos a jobb alsó sarkot kiharapva nyerő állásba kerül, akkor lépjen oda. Ha ez mégsem magbeli állás, de oda lép, akkor a második játékosnak lesz nyerő lépése. Viszont a kezdőállásból az első játékos is minden olyan állást el tud érni, mint amit a második játékos, amikor rá kerül a sor. Tehát az első játékos tud nyerő állásba lépni. ■

**1.7. Következmény.** *A téglalap alakú állások rosszak.*

**Bizonyítás.** Az 1.6. Állítás következménye. Ugyanis téglalap állásból mindig tudunk jó állásba lépni, és a mag definícióját felhasználva kapjuk, hogy a téglalap alakú állások rossz állások. ■

## 1.3. A $2 \times n$-es játék

**Jelölés.** Jelölje $(a, b)$ a $2 \times n$-es játékban azt az állást, amikor a felső sorban $a$ darab kocka, az alsó sorban pedig $b$ darab kocka van. Az $(a, b)$ állás csak akkor szabályos, ha $a \geq b \geq 0$, mert egy téglalap alakú kezdőállásból indulva a játék során csak ilyen állásokat érhetünk el. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $a \geq b \geq 0$.

**1.8. Tétel.** *Az $(a, a-1)$ alakú állások a jó állások $2 \times n$-es játék esetén.*

**Bizonyítás.** Egy állásra azt mondjuk, hogy szimmetrikus, ha a felső sorban a mérgezett kockát nem számolva a két sorban lévő kockák száma megegyezik. Másképpen megfogalmazva, ha a felső sorban a mérgezett kockával együtt $a$ darab kocka van, akkor az alsóban $a-1$ darab kockának kell lennie ahhoz, hogy az állás szimmetrikus legyen. Ha egy ilyen $(a, a-1)$ alakú állásba lépünk, akkor a másik játékos csak $(a, a-x)$ vagy $(a-y, a-y)$ alakú állásba tud lépni, ahol $1 < x \leq a$ és $1 \leq y < a$. Ezzel a lépéssel elrontja a szimmetriát. Ha $(a, a-x)$ alakú állásba lépett, akkor mi léphetünk az $(a-x+1, a-x)$ szimmetrikus állásba. Ha pedig $(a-y, a-y)$ alakú állásba lépett, akkor mi az $(a-y, a-y-1)$ szimmetrikus állásba léphetünk. Tehát nem szimmetrikus állásokból tudunk szimmetrikusba lépni, viszont szimmetrikusokból csak nem szimmetrikus állásba lehet lépni. Ezzel beláttuk, hogy a szimmetrikus állások alkotják a magot, tehát a nyerő stratégia az, hogy szimmetrikus állásokba lépjünk. ■

## 1.4. A $3 \times n$-es játék

**Jelölés.** Ha a $3 \times n$-es harapás játék első sorában $a$ darab kocka van, a másodikban $b$, a harmadikban pedig $c$, akkor ezt az állást jelölje $(a, b, c)$. Az $(a, b, c)$ állás csak akkor szabályos, ha $a \geq b \geq c \geq 0$, mert egy téglalap alakú kezdőállásból indulva a játék során csak ilyen állásokat érhetünk el. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $a \geq b \geq c \geq 0$.

Ha egy $(a, b, c)$ állásból egy $(a', b', c')$ állásba lépünk, ahol $a' \leq a$, $b' \leq b$, $c' \leq c$, azt a következőképpen jelöljük:

$$(a, b, c) \to (a', b', c').$$

Egy $(a, b, c)$ állásból hatféleképpen tudunk szabályosan tovább lépni (lásd a függelék 1. ábráját).

A $3 \times n$-es játék nyerő lépései nem triviálisak. A dolgozatom második fejezetében adok egy rekurziót a mag elemeinek kiszámolására, melyet táblázatba foglalok. Végül megmutatom, hogy a táblázatban levő sorok valahonnan kezdve periodikusak. Az imént említett periodicitásra vonatkozó sejtést először Xinyu Sun fogalmazta meg, majd a középiskolás Steven Byrnes bizonyitotta be [2]. A későbbiekben Zeilberger is bebizonyította a tételt és e mellett írt egy programot a mag elemeinek kiszámolására [7]. Beretka Csaba is adott egy hasonló algoritmust a mag meghatározására [1]. A második fejezetben Zeilberger bizonyítását ismertetem, a harmadik fejezetben pedig érdekes megfigyelésekről és sejtésekről írok.

# 2. A $3 \times n$-es játék magjának vizsgálata

## 2.1. A mag rekurzív leírása

A fejezet ezen részében definiálunk pár fontos fogalmat és kimondunk néhány állítást, amik hozzásegítenek minket ahhoz, hogy igazolni tudjuk, hogy a mag kiszámolható egy rekurzív függvénnyel.

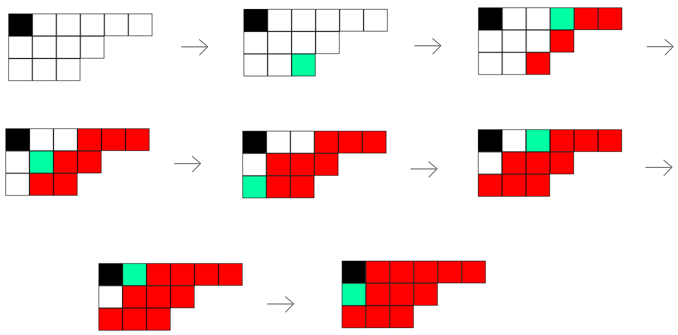
**2.1. Állítás.** *Tetszőleges $b \geq c$ nemnegatív egészek esetén legfeljebb egy olyan $a \geq b$ létezik, melyre $(a, b, c)$ jó állás.*

**Bizonyítás.** Az nem lehetséges, hogy $a' > a$, és $(a', b, c)$ és $(a, b, c)$ is jó állások, mert egy lépéssel $(a', b, c)$-ből $(a, b, c)$-be tudunk lépni. Azt pedig tudjuk, hogy egy magbeli állásból egy lépéssel nem tudunk magbeli állásba lépni. ■

**2.2. Definíció.** Jelölje $\alpha(b, c)$ azt az egyértelműen meghatározott $a$ értéket, amelyre $(a, b, c)$ jó állás (ha létezik), ha pedig nincs ilyen $a$, akkor legyen $\alpha(b, c) = *$.

A 2.2. Definícióban szereplő $\alpha(b, c)$ értékekkel ki tudunk tölteni egy táblázatot (a függelékben megtalálható 1. táblázat). Ez a táblázat minden információt tartalmaz a játék magjáról, ezért a célunk az, hogy minél több szabályszerűséget találjunk benne. Először egy példán keresztül megmutatjuk, hogy hogyan kell játszani a játékot a táblázat ismeretével.

**2.3. Példa.** Az 1. táblázat segítségével vizsgáljuk meg egy rögzített állásból induló játék egy lehetséges menetét. Legyen az állásunk $(6, 4, 3)$. Ha megnézzük a táblázatot, látjuk, hogy a $(6, 4, 3)$ állás nincs benne. Tehát keresünk egy olyan állást, ami benne van a táblázatban, és egy lépéssel el tudjuk érni. Egy ilyen állás $(6, 4, 2) \in M$. Lépjünk ide. Ebből a magbeli állásból a másik fél nem tud magbelibe lépni, a mag definíciója miatt. Tegyük fel, hogy a $(3, 3, 2) \notin M$ állásba lép. Ismét keresünk a táblázatban egy olyan állást, amit $(3, 3, 2)$-ből el tudunk érni, és oda lépünk. Ez a $(3, 1, 1)$ állás. Innen a másik játékos ismét nem tud jó állásba lépni, tegyük fel, hogy $(3, 1, 0)$-ba lép. Mi viszont a $(3, 1, 0)$ állásból léphetünk jó állásba: $(2, 1, 0) \in M$. Tegyük fel, hogy a másik játékos a $(2, 1, 0)$ állásból $(1, 1, 0)$-ba lép. Az $(1, 1, 0)$ állásból viszont mi léphetünk a végállásba, és így megnyerjük a játékot.



Ha jól megvizsgáljuk a táblázatot, akkor láthatjuk, hogy a $(6, 4, 3) \notin M$ állásból nem csak egy lehetőség van jó állásba lépni. A $(6, 4, 3)$ állásból léphetünk az imént említett $(6, 4, 2) \in M$ állásba, valamint a $(6, 3, 3)$ magbeli állásba.

**2.4. Állítás.** *Ha $(b, b, c)$ jó állás, akkor minden $b' > b$ esetén $\alpha(b', c) = *$.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $(b, b, c) \in M$ és $b' > b$. Mivel minden $a' \geq b'$ esetén $(a', b', c) \to (b, b, c)$, ezért $(a', b', c) \notin M$, tehát $\alpha(b', c) = *$. ■

**2.5. Definíció.** A $H \subseteq \mathbb{N}_0$ halmaz mex értéke az a legkisebb nemnegatív egész szám, ami nem eleme a $H$ halmaznak. Például: $\operatorname{mex}(\{0, 4, 7\}) = 1$.

**2.6. Tétel.** *Bármely $b$ és $c$ pozitív egészekre, ha minden $b' < b$ esetén $\alpha(b', c) \notin \{b', *\}$ akkor $\alpha(b, c)$ kiszámítható a következő rekurzióval (a* mex *kiszámításánál az esetleges $*$-okat figyelmen kívül hagyjuk):*

$$\begin{aligned} \alpha(b, c) = \operatorname{mex}(\{0, 1, \ldots, b-1\} &\cup \{\alpha(b, c') \mid c' < c\} \\ &\cup \{\alpha(b', c) \mid c \leq b' < b\} \\ &\cup \{\alpha(c', c') \mid c' < c\}). \end{aligned} \tag{1}$$

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $c \leq b$, és hogy minden $b' < b$ esetén $\alpha(b', c) \notin \{b', *\}$. Jelölje $a$ az (1) képlet jobb oldalán álló számot, és legyen $H_{b,c}$ a jobb oldalon álló halmaz, azaz $a = \operatorname{mex} H_{b,c}$. A $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ halmaz része $H_{b,c}$-nek, ezért $a \geq b$.

Azt akarjuk belátni, hogy $\alpha(b, c) = a$, azaz $(a, b, c) \in M$. Tehát azt kell igazolnunk, hogy $(a, b, c)$-ből csak rossz állásba lehet lépni. Az $(a, b, c)$ állásból a következő 6 módon tudunk továbblépni (lásd a függelékben az 1. ábrát):

$(a, b, c) \to (a', b, c)$

Azt feltettük, hogy $a' < a$ és azt is, hogy $a = \operatorname{mex} H_{b,c}$, ezt a kettőt és a mex definícióját felhasználva kapjuk, hogy $a' \in H_{b,c}$. Négy esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy az $a'$ szám a $H_{b,c}$ halmazt alkotó egyesítés melyik tagjába esik.

- Ha $a'$ eleme lenne a $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ halmaznak, akkor ellentmondásra jutnánk, mert $a' \geq b$.
- Ha létezik $c' < c$ úgy, hogy $a' = \alpha(b, c')$, akkor $\alpha$ definíciójából következik, hogy $(a', b, c') \in M$. Ekkor $(a', b, c)$-ből tudunk $(a', b, c')$-be lépni, tehát a mag definíciója miatt $(a', b, c) \notin M$.
- Ha létezik $c \leq b' < b$ úgy, hogy $a' = \alpha(b', c)$, akkor $(a', b', c) \in M$ az $\alpha$ függvény definíciója miatt. Azt viszont tudjuk, hogy $(a', b, c)$-ből tudunk $(a', b', c)$-be lépni. Ezt, és a mag definícióját felhasználva megkapjuk, hogy $(a', b, c)$ nem magbeli állás.
- Ha létezik $c' < c$ úgy, hogy $a' = \alpha(c', c')$, akkor $\alpha$ definíciója miatt $(a', c', c')$ magbeli állás. Nyilván $(a', b, c) \to (a', c', c')$, és ezért $(a', b, c) \notin M$ a mag definíciója miatt.

$(a, b, c) \to (b', b', c)$

A feltevésünk szerint $\alpha(b', c) \neq b'$, ezért $(b', b', c)$ nem magbeli állás.

$(a, b, c) \to (c', c', c')$

Az 1.7 Következményből tudjuk, hogy a téglalap alakú állások rosszak, tehát $(c', c', c') \notin M$.

$(a, b, c) \to (a, b', c)$

Azt tudjuk, hogy $\alpha(b', c) \in H_{b,c}$, ezért a mex definíciója miatt $a \neq \alpha(b', c)$. Ezt és a 2.2. Definíciót felhasználva azt kapjuk, hogy $(a, b', c)$ nem magbeli állás.

$(a, b, c) \to (a, c', c')$

Azt tudjuk, hogy $\alpha(c', c') \in H_{b,c}$, és ismét felhasználva a mex definícióját kapjuk, hogy $a \neq \alpha(c', c')$. Erre ismét alkalmazva a 2.2. Definíciót látjuk, hogy $(a, c', c') \notin M$.

$(a, b, c) \to (a, b, c')$

Mivel $\alpha(b, c') \in H_{b,c}$, a mex definíciója miatt $a \neq \alpha(b, c')$, így az $\alpha$ függvény definíciója szerint $(a, b, c') \notin M$. ■

A tételben az $\alpha(b, c)$ számra megadott rekurzióval egyszerűen ki tudjuk tölteni az 1. táblázatot, ami a függelékben van feltüntetve. A színezett $\alpha(b, c) = \alpha(7, 5) = 11$ számot az imént említett rekurzióval kapjuk, vagyis

$$\begin{aligned}&\operatorname{mex}(\{0,1,2,3,4,5,6\} \cup \{8,9,7\} \cup \{10,9\} \cup \{1,3,4,6,8\}) = \\ &\operatorname{mex}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}) = 11.\end{aligned}$$

## 2.2. A mag periodicitása

**Jelölés.** Jelöljük $d$-vel a csokoládé felső és középső sora hosszának a különbségét: $d := a - b$. Ha $\alpha(b, c) = *$, akkor legyen $\delta(b, c) = *$, egyébként pedig $\delta(b, c) := \alpha(b, c) - b$. Ha $\delta(b, c) = 0$, akkor a 2.4. Állítás miatt minden $b' > b$-re $\delta(b', c) = *$.

**2.7. Megjegyzés.** A $\delta(b, c)$ számokkal kitöltünk egy táblázatot (a függelék 2. táblázata), és áttérünk ennek a vizsgálatára a fejezet végéig, mert ebben jobban láthatóak a szabályszerűségek, mint például az, hogy a sorok periodikusak. Valamint fontos megjegyezni azt, hogy ha a táblázat $i$-edik sorára (oszlopára) hivatkozunk, akkor a $c = i$ sorra (oszlopra) gondolunk, például a $c = 0$ sort nulladik sornak nevezzük.

**2.8. Tétel.** *Bármely $b$ és $c$ nemnegatív egészekre, ha minden $b' < b$ esetén $\delta(b', c) \notin \{0, *\}$, akkor $\delta(b, c)$ a következőképpen számolható:*

$$\begin{aligned}\delta(b, c) = \operatorname{mex}(\{\delta(b, c') \mid c' < c\} &\cup \{\delta(b', c) + b' - b \mid c \leq b' < b\} \\ &\cup \{\delta(c', c') + c' - b \mid c' < c\} \qquad (2)\end{aligned}$$

.

**Bizonyítás.** Jelölje $K_{b,c}$ a (2) képlet jobb oldalán álló halmazt, $H_{b,c}$ pedig az (1) képlet jobb oldalán állót. Figyeljük meg, hogy $H_{b,c} = \{0, 1, \ldots b - 1\} \cup \{k + b \mid k \in K_{b,c}\}$. Azt akarjuk megvizsgálni, hogy $\operatorname{mex} H_{b,c} - b$ és $\operatorname{mex} K_{b,c}$ egyenlőek-e. Legyen $m = \operatorname{mex} H_{b,c} - b$, azaz $m + b = \operatorname{mex} H_{b,c}$. Belátjuk, hogy egyrészt $m \notin K_{b,c}$, másrészt $\{0, 1, \ldots, m - 1\} \subseteq K_{b,c}$.

1. Tegyük fel, hogy $m$ benne van a $K_{b,c}$ halmazban, ekkor $m + b \in H_{b,c}$. Ez pedig ellentmondás, mert $m + b = \operatorname{mex} H_{b,c}$. Tehát $m \notin K_{b,c}$.

2. Legyen $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, ekkor $b-1 < l+b < m+b = \operatorname{mex} H_{b,c}$. Ebből pedig következik, hogy $l + b$ benne van a $H_{b,c} \setminus \{0, 1, \ldots, b - 1\}$ halmazban, amiből pedig rögtön következik, hogy $l \in K_{b,c}$. Tehát $\{0, 1, \ldots, m - 1\} \subseteq K_{b,c}$. ■

**Jelölés.** Jelölje $K_{b,c,1}$, $K_{b,c,2}$, $K_{b,c,3}$ a (2) képlet jobb oldalán álló egyesítés három tagját (ekkor tehát $K_{b,c} = K_{b,c,1} \cup K_{b,c,2} \cup K_{b,c,3}$):

- $K_{b,c,1} = \{\delta(b,c') \mid c' < c\}$;
- $K_{b,c,2} = \{\delta(b',c) + b' - b \mid c \leq b' < b\}$;
- $K_{b,c,3} = \{\delta(c',c') + c' - b \mid c' < c\}$.

**2.9. Állítás.** *Ha a $(c-1)$-edik sorig a sorok közös felső korlátja $L$, akkor a $c$-edik sornak felső korlátja $L+1$:*

$$(\forall c' < c, \forall b \geq c : \delta(b,c') \leq L) \Rightarrow (\forall b \geq c : \delta(b,c) \leq L+1).$$

**Bizonyítás.** Rögzítsünk egy $c$ pozitív egészet, és tegyük fel, hogy tetszőleges $c' < c$ és tetszőleges $b \geq c'$ esetén $\delta(b,c') \leq L$, azaz a 2. táblázat első $c$ sorának felső korlátja $L$. Igazoljuk $b$ szerinti teljes indukcióval, hogy $\delta(b,c) \leq L+1$, azaz a $(c+1)$-edik sor felső korlátja $L+1$.

Ha $b = c$, akkor $\delta(b,c) = \delta(c,c) = \operatorname{mex}(\{\delta(c,c') \mid c' < c\} \cup \{\delta(c',c') + c' - c \mid c' < c\})$, ahol $\delta(c,c') \leq L$ és $\delta(c',c') \leq L$. Ezekből következik, hogy $\operatorname{mex} K_{b,c} \leq L+1$, azaz $\delta(c,c) \leq L+1$.

Most legyen $b > c$, és tegyük fel, hogy $\delta(b',c) \leq L+1$, minden $b' \in \{0,1,\ldots,b-1\}$ esetén. A továbbiakban a bizonyítás három részre bomlik, a $K_{b,c}$ halmaz részhalmazai szerint.

1. A feltételek miatt $K_{b,c,1}$ minden eleme legfeljebb $L$.
2. Ha $c \leq b' < b$, akkor az indukciós feltevés miatt $\delta(b',c) \leq L+1$, és $b' - b \leq -1$, tehát $\delta(b',c) + b' - b \leq L$. Azaz a $K_{b,c,2}$ halmaz minden eleme kisebb, mint $L$.
3. Mivel $c < b$, ezért $c' - b < 0$, így $\delta(c',c') + c' - b < L$ minden $c' < c$ esetén, azaz a $K_{b,c,3}$ halmaz minden eleme kisebb, mint $L$.

Beláttuk, hogy $K_{b,c} \subseteq \{0,1,\ldots,L\}$, ami azt jelenti, hogy $\delta(b,c) = \operatorname{mex} K_{b,c} \leq L+1$. ■

**2.10. Következmény.** *A 2. táblázat sorai korlátosak:*

$$\forall c \geq 0 \; \forall b \geq c : \delta(b,c) \leq c+1.$$

**Bizonyítás.** A következményt $c$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. A $c = 0$ esetet az 1.8. Tételben már vizsgáltuk, és tudjuk, hogy $\delta(b,0) = 1$. Tegyük fel, hogy $\delta(b,c') \leq c' + 1$, ha $c' \in \{0,1,\ldots,c-1\}$. Az $L = c$ választással alkalmazható a 2.9. Állítás, tehát $\delta(b,c) \leq c+1$. ■

**2.11. Állítás.** *Rögzített $c$ esetén, ha $b$ elég nagy, akkor $K_{b,c,3}$ minden eleme negatív, és ezért elég ha $\delta(b,c)$-t a következőkben így számoljuk:*

$$\delta(b,c) = \operatorname{mex}(K_{b,c,1} \cup \{\delta(b-1,c) - 1, \delta(b-2,c) - 2, \ldots, \delta(b-(c+1),c) - (c+1)\}).$$

**Bizonyítás.** Látszik, hogy $K_{b,c,3}$ elemei elég nagy $b$-re negatívak. Azt is tudjuk a 2.10. Következményből, hogy a sorok korlátosak, vagyis $c \leq b' < b$ esetén $\delta(b',c) + b' - b \leq c + 1 + b' - b$ negatív, ha $b' < b - c - 1$.

A mex operátor definíciójából pedig következik, hogy a negatív számok, vagyis $K_{b,c,3}$ elemei, és $K_{b,c,2}$ azon elemei melyeknél $b - b' > c+1$, nem befolyásolják a (2) képletbeli halmaz mex értékét, tehát azokkal nem kell foglalkoznunk. ■

**2.12. Definíció.** Jelölje $D(b,c)$ a következő vektort:

$$D(b,c) = (\delta(b-1,c), \delta(b-2,c), \dots, \delta(b-(c+1),c)).$$

Valamint legyen $\delta(b,c)$ *előzménye*:

$$EL(b,c) = (K_{b,c,1}, D(b,c)).$$

**2.13. Állítás.** *Ha $b_1$ és $b_2$ elég nagy, akkor*

$$EL(b_1,c) = EL(b_2,c) \Rightarrow \delta(b_1,c) = \delta(b_2,c).$$

**Bizonyítás.** Az állítás a 2.8. Tételből és a 2.11. Állításból következik. ■

**2.14. Tétel.** *A sorok periodikusak, azaz:*

$$\forall c \ \exists N_c \ \exists p_c : \forall b \geq N_c : \delta(b,c) = \delta(b+p_c,c).$$

**Bizonyítás.** A tételt $c$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az 1.8. Tételből tudjuk, hogy $c=0$ esetén a periódus 1. Tegyük fel, hogy $\delta(b,c') = \delta(b+p_{c'},c')$, minden $c' < c$ és $b \geq N_{c'}$ esetén.

- Először azt látjuk be, hogy a $K_{b,c,1}$ halmazsorozat periodikus, vagyis hogy

  $$\exists N \ \exists q \ \forall b \geq N : K_{b,c,1} = K_{b+q,c,1}.$$

  Ha $N = \max\{N_0, N_1, \dots, N_{c-1}\}$ és $q = \mathrm{lkkt}(p_0, p_1, \dots, p_{c-1})$, akkor az indukciós feltevésből következik, hogy $\delta(b,c') = \delta(b+q,c')$, ha $b \geq N$ és $c' < c$. Tehát a $K_{b,c,1}$ és $K_{b+q,c,1}$ halmazok elemei megegyeznek.

- Most lássuk be, hogy létezik $b_0$ és $p \in \mathbb{N}$, amire a következők teljesülnek:

  a) $b_0$ elég nagy (elég nagy ahhoz, hogy teljesítse a 2.11. Állítást, és nagyobb legyen az előző pontbeli $N$ számnál is);

  b) $p$ osztható $q$-val;

  c) $EL(b_0,c) = EL(b_0+p,c)$.

  Tegyük fel, hogy $b_1$ elég nagy az a) állításunknak megfelelően. Emlékezzünk, hogy $EL(b_1,c) = (K_{b_1,c,1}, D(b_1,c))$. Vizsgáljuk meg a következő előzménysorozatot: $EL(b_1,c)$, $EL(b_1+q,c), EL(b_1+2q,c), \dots$. A 2.10. Következmény miatt $K_{b_1,c,1} \subseteq \{0,1,\dots,c\}$, és $D(b_1,c) \in (\{0,1,\dots,(c+1)\}^{(c+1)})$. Ezekből következik, hogy véges sok féle előzmény van, ezért az előzménysorozatban lesz ismétlődés, vagyis léteznek $i,j \in \mathbb{N}$ számok ($i < j$), hogy $EL(b_1+iq,c) = EL(b_1+jq,c)$. Legyen $b_0 = b_1 + iq$ ($b_1$ miatt $b_0$ is elég nagy lesz az a) állításnak megfelelően) valamint legyen $p = (j-i)q$. Ekkor $p$ osztható lesz a $q$ számmal, és ezekre a $b_0$ és $p$ számokra teljesül a c) állítás is, mert

  $$EL(b_0,c) = EL(b_1+iq,c) = EL(b_1+jq,c) = EL(b_0+p,c),$$

  az utolsó egyenlőség azért igaz, mert $b_0 + p = b_1 + iq + jq - iq = b_1 + jq$. Tehát beláttuk, hogy léteznek olyan $b_0$ és $p$ számok, amik teljesítik a fenti feltételeket.

- Tehát $EL(b_0, c) = EL(b_0 + p, c)$, ebből pedig a 2.13. Állítást felhasználva következik, hogy $\delta(b_0, c) = \delta(b_0 + p, c)$ minden $b \geq b_0$ esetén. Végül azt mutatjuk meg, hogy $\delta(b, c) = \delta(b + p, c)$. Ennek a bizonyításához először vizsgáljuk meg az $EL(b_0 + 1, c)$ és az $EL(b_0 + 1 + p, c)$ előzmények közötti kapcsolatot. Az előzőekből már tudjuk, hogy

$$EL(b_0 + 1, c) = (K_{b_0+1,c,1}, D(b_0 + 1, c)),$$
$$EL(b_0 + 1 + p, c) = (K_{b_0+1+p,c,1}, D(b_0 + 1 + p, c)).$$

Mivel $p$ többszöröse $q$-nak, a bizonyítás első pontjából következik, hogy $K_{b_0+1,c,1} = K_{b_0+1+p,c,1}$.

Emlékezzünk vissza, hogy

$$D(b_0, c) = (\delta(b_0 - 1, c), \delta(b_0 - 2, c), \ldots, \delta(b_0 - (c + 1), c)).$$

A $D(b_0 + 1, c)$ vektort, úgy kapjuk, hogy $D(b_0, c)$ utolsó elemét levágjuk, az elejéhez pedig hozzáírjuk a $\delta(b_0, c)$ számot:

$$D(b_0 + 1, c) = (\delta(b_0, c), \delta(b_0 - 1, c), \ldots, \delta(b_0 - c, c)).$$

Hasonlóan kapható $D(b_0 + 1 + p, c)$ a $D(b_0 + p, c)$ vektorból:

$$D(b_0 + 1 + p, c) = (\delta(b_0 + p, c), \delta(b_0 - 1 + p, c), \ldots, \delta(b_0 - c + p, c)).$$

Mivel $EL(b_0, c) = EL(b_0 + p, c)$, ezért $D(b_0, c) = D(b_0 + p, c)$. Az eddigiek következménye az alábbi implikáció:

$$D(b_0, c) = D(b_0 + p, c) \qquad \text{és} \qquad \delta(b_0, c) = \delta(b_0 + p, c)$$
$$\Rightarrow D(b_0 + 1, c) = D(b_0 + 1 + p, c).$$

Mivel $K_{b_0+1,c,1} = K_{b_0+1+p,c,1}$ és $D(b_0 + 1, c) = D(b_0 + 1 + p, c)$, ezért $EL(b_0 + 1, c) = EL(b_0 + 1 + p, c)$. Az $EL(b_0 + 1, c) = EL(b_0 + 1 + p, c)$ egyenlőségből pedig a 2.13. Állítással következik, hogy $\delta(b_0+1, c) = \delta(b_0+1+p, c)$. Hasonlóan az előzőekhez megkapjuk, hogy $EL(b_0 + 2, c) = EL(b_0 + 2 + p, c)$, amiből a 2.13. Állítás segítségével kapjuk, hogy $\delta(b_0 + 2, c) = \delta(b_0 + 2 + p, c)$, és így tovább. Tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy tetszőleges $b \geq b_0$ esetén $\delta(b, c) = \delta(b + p, c)$. ■

# 3. Érdekességek

A továbbiakban csak az $\alpha$ értékeket tartalmazó 1. táblázattal foglalkozunk, melyben a csillagos sorokat *rövid soroknak*, a nem csillagos sorokat pedig *hosszú soroknak* fogjuk nevezni. Főátló alatt pedig az $\alpha(b, b)$ alakú táblázatbeli számokat értjük.

**3.1. Állítás.** *A $3 \times n$-es játék esetén, egy tetszőleges állásból legfeljebb három jó lépés van. Ha pedig az állás $(a, a, a)$ alakú, akkor legfeljebb két nyerő lépés létezik, és ezek $(a, b, b)$ és $(a, a, c)$ alakúak, ahol $c < b$.*

**Bizonyítás.** Az 1. ábrából tudjuk, hogy egy tetszőleges $(a, b, c)$ állásból legfeljebb hatféleképpen léphetünk. Az itt lévő lépéseket három csoportba tudjuk osztani aszerint hogy melyik sortól kezdve harapunk.

1. **csoport**

- $(a, b, c) \to (a', b, c)$, ahol $b \leq a' < a$
- $(a, b, c) \to (b', b', c)$, ahol $c \leq b' < b$
- $(a, b, c) \to (c', c', c')$, ahol $0 < c' < c$

2. **csoport**

- $(a, b, c) \to (a, b', c)$, ahol $c \leq b' < b$
- $(a, b, c) \to (a, c', c')$, ahol $0 \leq c' < c$

3. **csoport**

- $(a, b, c) \to (a, b, c')$, ahol $0 \leq c' < c$

Ha csak az 1. csoportbeli lépéseket használjuk, akkor csak egy olyan jó állás lehet, ami a rögzített $(a, b, c) \notin M$ állásból egy lépéssel elérhető. Ha több olyan jó állás lenne, ami az $(a, b, c)$ állásból egy lépéssel elérhető, akkor az egyik ilyen jó állásból egy lépéssel el tudnánk érni a másik ilyen jó állást, ami a mag definíciója miatt nem lehetséges. Hasonlóan, ha csak 2. csoportbeli lépéseket használunk, akkor is csak egy olyan jó állás lehet, ami a rögzített $(a, b, c) \notin M$ állásból egy lépéssel elérhető. Tehát a rögzített $(a, b, c)$ állásból csoportonként legfeljebb egy jó lépés van, ami azt jelenti hogy legfeljebb három jó lépés van az $(a, b, c)$ állásból.

Ha az állás téglalap alakú, vagyis $(a, a, a)$, akkor ebből legfeljebb csak két jó lépés létezik, mert az 1. csoportbeli lépések közül ilyen alakú állásból csak téglalap alakú állásba léphetünk, amiről tudjuk, hogy rossz. Tehát az $(a, a, a)$ állásból az egy lépéssel elérhető jó állások $(a, b, b)$ és $(a, a, c)$ alakúak. Ha $(a, b, b) \in M$ és $(a, a, c) \in M$, akkor az is igaz, hogy $c < b$, mert ha $\alpha(b, b) = a$, akkor a 2.6. Tétel miatt $a$ a $(b + 1)$-edik sortól nem fordul elő a táblázatban, sem később a $b$-edik sorban. Ebből következik, hogy $\alpha(a, c) = a$ csak $c < b$ esetén lehetséges. ■

**3.2. Példa.** Az előző állítás alapján adunk három példát, miszerint egy rossz állásból pontosan egy, kettő vagy három jó lépés létezik.

1. A $(10, 7, 2)$ állásból csak egy jó állásba léphetünk: a $(9, 7, 2)$ állásba.
2. A $(6, 6, 3)$ állásból két jó állásba léphetünk: a $(6, 3, 3)$ és a $(5, 5, 3)$ állásba.
3. A $(19, 14, 10)$ állásból pedig három jó állásba is léphetünk: a $(19, 14, 7)$, a $(19, 11, 10)$ és a $(14, 14, 10)$ állásba.

Arra, hogy egy téglalap alakú állásból két jó lépés is létezik, nem tudunk példát mondani, ugyanis ilyet még nem találtak. Ezért a következő sejtést lehet megfogalmazni:

**Sejtés.** Téglalap alakú kezdőállásból mindig egyértelmű a kezdő nyerő lépés.

**3.3. Következmény.** *Az átlóban és a rövid sorok végén együttesen minden pozitív egész szám előfordul.*

**Bizonyítás.** Az 1.7. Következmény miatt téglalap alakú állásból létezik nyerő lépés, és ezek a 3.1. Állítás miatt éppen $(a, b, b)$ és $(a, a, c)$ alakúak, melyek az átlóban és a rövid sorok végén szerepelnek. ■

A kezdőlépés egyértelműségére vonatkozó sejtés azzal ekvivalens, hogy minden természetes szám csak egyszer lép fel a főátlóban vagy a rövid sorok végein. Ezért a fejezet további részében a rövid sorok vizsgálatával foglalkozunk.

A rövid sorokkal kapcsolatban egyéb érdekes sejtések is felmerülnek. Például az, hogy a rövid sorok minimumai a sorok végére esnek, vagy hogy a rövid sorok minimuma éppen a felettük levő hosszú sorok minimuma is (a harmadik sortól kezdve). Vegyük észre azt, hogy ha ez a két sejtés igaz, akkor az következik belőlük, hogy a hosszú sorok minimuma soha nem átlóbeli elem.

Ha a rövid sorok minimumairól szóló sejtést tudnánk bizonyítani, akkor a kezdőlépés egyértelműségére vonatkozó sejtést is igazolnánk. A következő két tételben ennek a belátásával foglalkozunk. A következő állítás bizonyításában megmutatjuk, hogy ha egy rövid sor minimuma a sor végére esik, akkor ez a szám nem lép fel már később a táblázatban.

**3.4. Állítás.** *Ha $\alpha(b, c) = b$ és $b = \min\{\alpha(c, c), \alpha(c + 1, c), \ldots, \alpha(b, c)\}$, akkor a $c$-edik sor után $b$ már nem lép fel a táblázatban.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $\alpha(b, c) = b$ és $b = \min\{\alpha(c, c), \alpha(c+1, c), \ldots, \alpha(b, c)\}$ (lásd a lenti táblázatot, ahol a $b = 9$ és $c = 6$ esetet vizsgáljuk). A $c$-edik sor alatt a $b$-edik oszlopban (lilával szinezett számok) és a $b$-edik oszlop után (kékkel szinezett számok) $\alpha(b, c) = b$ többet nem lép fel a táblázatban, a 2.6. Tétel miatt. Tehát a továbbiakban elég a $b' < b$ oszlopokkal foglalkozni. Vegyünk egy $b' < b$ számot (a példánkban $b' := 8$, és ekkor $\alpha(b', c) = \alpha(8, 6) = 13$), és vezessük be a következő jelöléseket:

$$U := \{\alpha(b', 0), \ldots, \alpha(b', c - 1)\};$$
$$V := \{\alpha(c, c), \ldots, \alpha(b' - 1, c)\};$$
$$W := \{\alpha(0, 0), \ldots, \alpha(c - 1, c - 1)\}.$$

Vegyük észre, hogy az $U$ (sárga mezők), $V$ (piros mezők) és $W$ (zöld mezők) halmazok a 2.6. Tétel bizonyításában bevezetett $H_{b',c}$ halmaz részhalmazai, mert

$$H_{b',c} = \{0, 1, \ldots, b' - 1\} \cup U \cup V \cup W.$$

Mivel a $c$-edik sor minimuma $b$ volt, ezért $\operatorname{mex} H_{b',c} = \alpha(b', c) > b$, amiből pedig következik, hogy $\{0, 1, \ldots, b\} \subseteq H_{b',c}$. Azt tudjuk, hogy $V$ minden eleme nagyobb $b$-nél. Ebből következik, hogy $\{0, 1, \ldots, b\} \subseteq \{0, 1, \ldots, b'-1\} \cup U \cup W$. Azt szeretnénk belátni, hogy ha veszünk egy tetszőleges $c' > c$ számot (a példánkban $c' = 7$, és ekkor $\alpha(b', c') = \alpha(8, 7) = 14$), akkor $\alpha(b', c') \neq b$. Azt tudjuk, hogy $H_{b',c'} = \{0, 1, \ldots, b'-1\} \cup U' \cup V' \cup W'$ (aláhúzott számokkal jelöltük az $U', V', W'$ halmazok elemeit), ahol

$$\begin{aligned} U' &= \{\alpha(b', 0), \ldots, \alpha(b', c-1), \alpha(b', c), \ldots, \alpha(b', c'-1)\}; \\ V' &= \{\alpha(c', c'), \ldots, \alpha(b'-1, c')\}; \\ W' &= \{\alpha(0, 0), \ldots, \alpha(c-1, c-1), \alpha(c, c), \ldots, \alpha(c'-1, c'-1)\}. \end{aligned}$$

Látható, hogy $U \subseteq U'$ és $W \subseteq W'$, azt pedig már korábban igazoltuk, hogy $\{0, 1, \ldots, b\} \subseteq \{0, 1, \ldots, b'-1\} \cup U \cup W$. Tehát $\{0, 1, \ldots, b\} \subseteq \{0, 1, \ldots, b'-1\} \cup U' \cup W'$, és így $\alpha(b', c') = \operatorname{mex} H_{b',c'} > b$.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\underline{1}$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\underline{9}$ | 10 | 11 | |
| 1 | – | $\underline{3}$ | 2 | * | * | * | * | * | $\underline{*}$ | * | * | |
| 2 | – | – | $\underline{4}$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\underline{10}$ | 11 | 12 | |
| 3 | – | – | – | $\underline{6}$ | 7 | 5 | * | * | $\underline{*}$ | * | * | |
| 4 | – | – | – | – | $\underline{8}$ | 9 | 10 | 7 | $\underline{*}$ | * | * | |
| 5 | – | – | – | – | – | $\underline{10}$ | 9 | 11 | $\underline{12}$ | 13 | 14 | |
| 6 | – | – | – | – | – | – | $\underline{11}$ | $\underline{12}$ | $\underline{13}$ | 9 | * | |
| 7 | – | – | – | – | – | – | – | $\underline{13}$ | 14 | 12 | 15 | |
| 8 | – | – | – | – | – | – | – | – | 15 | 14 | 16 | |
| 9 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 16 | 17 | |
| 10 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 18 | |
| $c$ | | | | | | | | | | | | |

■

**3.5. Tétel.** *A $3 \times n$-es harapás játék esetében, ha a kezdőállás téglalap alakú, és a rövid sorok minimumai a sorok végére esnek, akkor egyértelmű a kezdő nyerő lépés.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy a rövid sorok minimumai a sorok végére esnek. Indirekten pedig tegyük fel azt, hogy egy $(a, a, a)$ téglalap alakú állásból két jó lépés létezik. A 3.1. Állításból tudjuk, hogy egy ilyen állásból az egy lépéssel elérhető két nyerő állás $(a, b, b)$ és $(a, a, c)$ alakú, valamint ilyenkor $c < b$. A 3.4. Állításból tudjuk, hogy ha $\alpha(a,c)=a$, vagyis ha $a$ a $c$-edik rövid sor végére esik, akkor többet $a$ nem lép fel a táblázatban. Tehát ha $(a,a,c)\in M$, akkor $(a,b,b)\notin M$, mert az előzőek miatt az $\alpha(b,b)=a$ szám nem szerepelhet a táblázatban a $c$-edik sor alatt. ■

Érdekes megfigyelés, hogy az 1. táblázatban végtelen sok rövid sor van. Ennek igazolásához szükségünk van a következő lemmára.

**3.6. Lemma.** *A főátlóban szereplő elem minden esetben nagyobb, mint a közvetlenül felette álló, vagyis* $\alpha(b,b)>\alpha(b,b-1)$.

**Bizonyítás.** A 2.6. Tétel szerint

$$\alpha(b,b)=\operatorname{mex}(\{0,1,\dots,b-1\}\cup\{\alpha(b,b')\mid b'<b\}\cup\{\alpha(b',b')\mid b'<b\})\text{ és}$$

$$\alpha(b,b-1)=\operatorname{mex}(\{0,1,\dots,b-1\}\cup\{\alpha(b,b')\mid b'<b-1\}\cup\{\alpha(b',b')\mid b'<b\}).$$

Ha jól megnézzük látjuk, hogy a két érték kiszámolásakor ugyanazok az elemek vannak a halmazban, kivéve, hogy $\alpha(b,b)$ kiszámolásakor belevesszük a halmazba még az $\alpha(b,b-1)$ értéket is. Ebből következik, hogy $\alpha(b,b)>\alpha(b,b-1)$. ■

**3.7. Tétel.** *Végtelen sok rövid sor van.*

**Bizonyítás.** Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy véges sok rövid sor van, vagyis véges sok $(b,b,c)\in M$ állás van. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $r$ szám, hogy ha $b\geq r$, akkor $(b,b,c)\notin M$ (a lenti ábrán az $r$-edik oszlopig az átlóban levő elemeket jelöljük pirossal). Ha a játékot a $(b,b,b)$ téglalap alakú állásból indítjuk, és tudjuk, hogy tetszőleges $c$ esetén $(b,b,c)$ nem magbeli állás, akkor a 3.3. Következmény miatt létezik olyan $c$, melyre $(b,c,c)$ magbeli állás. A táblázatban ezek a $(b,c,c)$ alakú állások éppen a főátlón helyezkednek el. Tehát az indirekt feltevésünk miatt az $r,r+1,r+2,\dots$ számok mind fellépnek a főátlóban.

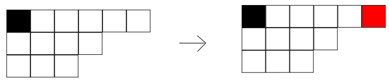
| | 0 | 1 | | | | $r$ | | | $t$ | | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | – | | | | | | | | | | | |
| | – | – | | | | | | | | | | |
| | – | – | – | $h$ | | | | | | | | |
| | – | – | – | – | | | | | | | | |
| $r$ | – | – | – | – | – | | | | | | | |
| | – | – | – | – | – | – | | | | | | |
| $t-1$ | – | – | – | – | – | – | – | | $x$ | | | |
| $t$ | – | – | – | – | – | – | – | – | $g$ | | | |
| | – | – | – | – | – | – | – | – | – | | | |
| | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | | |
| $c$ | | | | | | | | | | | | |

Jelöljük $h$-val a főátló első $r+1$ elemének (azaz a fenti ábrán pirossal jelölt számoknak) a maximumát, vagyis formálisan $h = \max\{\alpha(0,0), \dots, \alpha(r,r)\}$. Továbbá legyen $g$ a főátlóban utoljára előforduló olyan szám, aminek az értéke legfeljebb $h$. Tehát $g$ után a főátlóban minden elem értéke nagyobb, mint $h$ (a fenti ábrán a főátlóban $g$ után fellépő elmeket jelöljük zölddel). A $g$ szám legyen a táblázat $t$-edik sorának $t$-edik oszlopában, vagyis $g = \alpha(t,t)$, és ekkor $t \geq r$. Vizsgáljuk a $t$-edik oszlopban a $g$ feletti elemet, vagyis az $\alpha(t, t-1)$ értéket (amit a fenti táblázatban $x$-szel jelölünk). Egyrészt a 3.6. Lemma miatt $\alpha(t, t-1) < \alpha(t,t) = g$, és azt is tudjuk, hogy $g \leq h$, tehát $\alpha(t, t-1) < h$. Az $\alpha(t, t-1)$ érték a $t$-edik sor után már nem fordulhat elő a főátlóban, mert kisebb $h$-nál, és $g$ volt az utolsó olyan szám a főátlóban, ami nem nagyobb, mint $h$. A 2.6. Tétel miatt a $t$-edik sor előtt sem fordulhat elő $\alpha(t, t-1)$. Ezzel beláttuk, hogy $\alpha(t, t-1)$ nem szerepel a főátlóban.

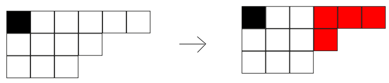
Másrészt mivel a csokoládé felső sora legalább olyan hosszú mint a második, ezért $\alpha(t, t-1) \geq t$, és mivel $t \geq r$, ezért $\alpha(t, t-1) \geq r$. Az indirekt feltevésünk miatt $r$-től minden számnak fel kell lépnie a főátlóban, így az $\alpha(t, t-1)$ számnak is. Ezzel pedig ellentmondásra jutottunk. ∎

# Függelék

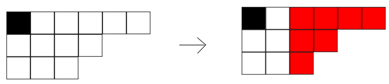
1. $(a, b, c) \to (a', b, c)$, ahol $b \leq a' < a$;



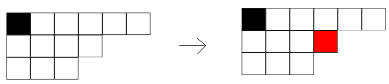
2. $(a, b, c) \to (b', b', c)$, ahol $c \leq b' < b$;



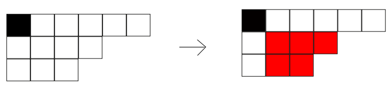
3. $(a, b, c) \to (c', c', c')$, ahol $0 < c' < c$;



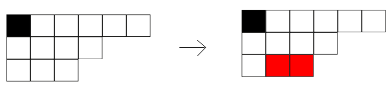
4. $(a, b, c) \to (a, b', c)$, ahol $c \leq b' < b$;



5. $(a, b, c) \to (a, c', c')$, ahol $0 \leq c' < c$;



6. $(a, b, c) \to (a, b, c')$, ahol $0 \leq c' < c$.



1. ábra. A $3 \times n$-es harapás játék szabályos lépései

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | |
| 1 | – | 3 | 2 | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | |
| 2 | – | – | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
| 3 | – | – | – | 6 | 7 | 5 | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | |
| 4 | – | – | – | – | 8 | 9 | 10 | 7 | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | |
| 5 | – | – | – | – | – | 10 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | |
| 6 | – | – | – | – | – | – | 11 | 12 | 13 | 9 | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * | |
| 7 | – | – | – | – | – | – | – | 13 | 14 | 12 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | |
| 8 | – | – | – | – | – | – | – | – | 15 | 14 | 16 | 17 | 12 | * | * | * | * | * | * | * | * | |
| 9 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 16 | 17 | 14 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | |
| 10 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 18 | 19 | 20 | 21 | 14 | * | * | * | * | * | * | |
| 11 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 20 | 19 | 22 | 17 | 23 | 24 | 25 | 21 | 26 | 27 | |
| 12 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 21 | 23 | 22 | 24 | 19 | 17 | * | * | * | |
| 13 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 24 | 23 | 22 | 25 | 26 | 27 | 19 | * | |
| 14 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 25 | 26 | 23 | 27 | 28 | 22 | 29 | |
| 15 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 27 | 26 | 28 | 29 | 30 | 23 | |
| 16 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 28 | 29 | 26 | 31 | 30 | |
| 17 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 30 | 31 | 29 | 32 | |
| 18 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 32 | 33 | 31 | |
| 19 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 34 | 33 | |
| 20 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 35 | |
| $c$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

1. táblázat. A $3 \times n$-es harapás játék magját leíró $\alpha(b, c)$ értékek táblázata

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | – | 2 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | |
| 2 | – | – | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | |
| 3 | – | – | – | 3 | 3 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | |
| 4 | – | – | – | – | 4 | 4 | 4 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | |
| 5 | – | – | – | – | – | 5 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | |
| 6 | – | – | – | – | – | – | 5 | 5 | 5 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | |
| 7 | – | – | – | – | – | – | – | 6 | 6 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | |
| 8 | – | – | – | – | – | – | – | – | 7 | 5 | 6 | 6 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | |
| 9 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 7 | 7 | 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | |
| 10 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 8 | 8 | 8 | 8 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | $*$ | |
| 11 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 9 | 7 | 9 | 3 | 8 | 8 | 8 | 3 | 7 | 7 | |
| 12 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 9 | 10 | 8 | 9 | 3 | 0 | $*$ | $*$ | $*$ | |
| 13 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 11 | 9 | 7 | 9 | 9 | 9 | 0 | $*$ | |
| 14 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 11 | 11 | 7 | 10 | 10 | 3 | 9 | |
| 15 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 12 | 10 | 11 | 11 | 11 | 3 | |
| 16 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 12 | 12 | 8 | 12 | 10 | |
| 17 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 13 | 13 | 10 | 12 | |
| 18 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 14 | 14 | 11 | |
| 19 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 15 | 13 | |
| 20 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 15 | |
| $c$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

2. táblázat. A $3 \times n$-es harapás játék magját leíró $\delta(b,c)$ értékek táblázata

# Hivatkozások


[1] Beretka Csaba, személyes közlés, 2014.

[2] S. Byrnes, *Poset game periodicity*, Integers **3** (2003), G3, 16 pp.

[3] Csákány Béla, *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon Könyvtár, Szeged, 2005.

[4] Horváth Gábor, Molnár-Sáska Ildikó, *A mérgezett csokoládé rejtélye*, Mat. Lapok **13** (2006/2007), 28–43.

[5] A. E. Brouwer, G. Horváth, I. Molnár-Sáska, Cs. Szabó, *On three-rowed chomp*, Integers **5** (2005), no. 1, G7, 11 pp.

[6] D. Zeilberger, *Three-rowed Chomp*, Adv. in Appl. Math. **26** (2001), 168–179.

[7] D. Zeilberger, *Chomp, recurrences and chaos(?)*, J. Difference Equ. **10** (2004), 1281–1293.

# Nyilatkozat

Alulírott Kiskároly Tímea kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

2016. május 14.

Kiskároly Tímea